Université Sidi Mohammed Ben abdellah **Année universitaire 2020-2021**
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées **Filière CP2 Algèbre 3**
Fès **H. Benbouziane**

Série de T.D. $N^\circ.3$
Réduction des endomorphismes

Exercice 0.1 ***S****ans calculer le polynôme caractéristique ou la matrice de passage, indiquer si les matrices suivantes sont diagonalisables ou trigonalisables sur* $\mathbb{R}$.
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 0 & 2m & 8 \\ 0 & 0 & 3m \end{pmatrix},$
$(m \in \mathbb{IR})$,

Exercice 0.2 *Etudier la diagonalisation sur* $\mathbb{R}$ *des matrices suivantes. On donnera une forme diagonale et une matrice de passage.*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 0.3 *On considère l'endomorphisme* $\phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ *telle que* $\phi(P) = 3XP - (X^2 - 1)P'$.

1. *Donner la matrice de* ϕ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Montrer que l'endomorphisme* ϕ *est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.*

Exercice 0.4 *Etudier si les matrices suivantes sont diagonalisables ou trigonalisables sur* $\mathbb{R}$.
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

Exercice 0.5 *Soit* f *un endomorphisme de* $E = \mathbb{R}^n$ *tel que* $fof = f$. *On suppose que* f *est différent de l'application nulle et de l'identité.*

1. *Déterminer les valeurs propres de* f.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *Montrer que les vecteurs* $u = f(x) \in E_1$ *et* $v = x - f(x) \in E_0$, *où* E_0 *et* E_1 *sont les sous espaces associés à* 0 *et* 1 *repectivement.*
3. *En déduire que* f *est diagonalisable.*
4. *Donner les sous espaces vectoriels propres (Exprimer les en fonction de* $Im(f)$ *et* $Ker(f)$ *).*

Exercice 0.6 *Soit* f *un endomorphisme de* E *un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel de dimension* n $(n \geqslant 2)$ *tel que* $rg(f) = 1$ *et* $f \circ f \neq 0$.

1. *Montrer qu'il existe un vecteur non nul* $u \in E$ *tel que* $Im(f) =< u >$.
2. *Démontrer que* u *est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle* λ.
3. *En déduire que* f *est diagonalisable.*

Exercice 0.7 (1) *Soient* A *et* B *deux matrices nilpotentes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = BA$.
Montrer que la matrice $A + B$ *est nilpotente.*
(2) *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n *diagonalisable. Montrer que* A^2 *est diagonalisable.*

Exercice 0.8 *On considère l'endomorphisme f définie sur par la matrice B suivante :*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & 6 & 1 & 6 \\ -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de B.*
2. *Déterminer Les sous espaces E_3 et E_{-3}. En déduire que B n'est pas diagonalisable.*
3. *Déterminer la réduite de Jordan J de ϕ et une matrice iversible P telle que $P^{-1}BP = J$.*
4. *Déterminer l'expression du terme général de chacune des quatre suites récurrentes définies par :*
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 2y_n + 4z_n - 2t_n \\ y_{n+1} = -2x_n - 1y_n - 2z_n - 4t_n \\ z_{n+1} = 4x_n + 6y_n + z_n + 6t_n \\ t_{n+1} = -2x_n - 4y_n - 2z_n - t_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 2 \\ t_0 = 1 \end{cases}$$

Exercice 0.9 *On considère l'endomorphisme ϕ définie sur par la matrice suivante :* $A = \begin{pmatrix} 7 & 51 & -13 \\ -3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

1. *Déterminer le polynôme caractéristique. En déduire que $(A - 2I)^3 = 0$.*
2. *Montrer que A n'est pas diagonalisable.*
3. *Déterminer la réduite de Jordan J de ϕ et une matrice iversible P telle que $P^{-1}AP = J$.*
4. *Déterminer la décomposition de Dunford de J.*
5. *En déduire l'expression de A^n pour $n \geq 4$.*

Exercice 0.10 ***(Session normale 18-19)***
On considère l'endomorphisme f définie, sur $E = \mathbb{R}^3$, par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

1. *Déterminer les valeurs propres de f. En déduire que $Ker(f - 2I_d)^3 = E$.*
2. *La matrice A est-elle diagonalisable.*
3. *Déterminer le polynôme minimal de A. En déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A et I.*
4. *Déterminer la réduite de Jordan J de A. Préciser la base de Jordan et la matric de passage P telle que $P^{-1}AP = J$.*
5. *Donner une décomposition de Dunford de J.*
6. *En déduire l'expression de $Exp(J)$.*
7. *Application : résoudre le système suivant :* $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$

Exercice 0.11 *On considère l'endomorphisme ϕ définie sur par la matrice suivante :* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

1. *Déterminer le polynôme caractéristique. En déduire que $(A - 2I)^3 = 0$.*
2. *Déterminer la réduite de Jordan J de ϕ et une matrice iversible P telle que $P^{-1}AP = J$.*
3. *Résoudre le système suivant :* $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$